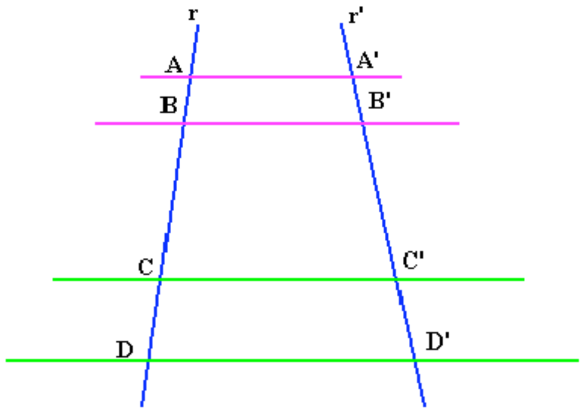
TEOREMA DI TALETE

Attribuito a Talete di Mileto che ne era sicuramente a conoscenza ma tale relazione era già nota agli antichi babilonesi. La prima dimostrazione di cui si abbia documentazione è di Euclide (III sec a.C. Elementi VI 2).

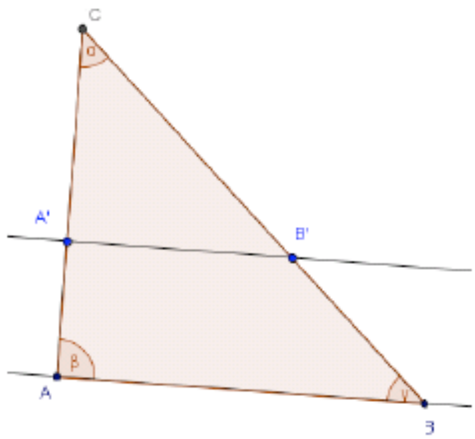
Teorema:
Un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali forma coppie di segmenti direttamente proporzionali, forma cioè figure simili tra loro.

AB : BC = A'B' : B'C'
AA' : BB' = CC' : DD'

Consideriamo un fascio di rette distinte e parallele (per convenzione ne disegniamo quattro), che intersecano due rette *r* ed *s* distinte. Le rette parallele intersecano la retta *r* in quattro punti denominati A, B, C, D e la retta *s* nei punti corrispondenti A', B', C', D'.



Si può dimostrare, con la stessa tecnica che abbiamo usato per trovare la città perduta, che i segmenti che si determinano sull'una sono proporzionali ai segmenti che si determinano sull'altra, perciò vale la seguente proporzione:



Corollario
In un triangolo una retta parallela ad un lato determina sugli altri due lati o sui loro prolungamenti segmenti proporzionali.

Conseguenze
• Il teorema di Talete applicato ai triangoli è in grado di spiegare il secondo criterio di similitudine dei triangoli (due triangoli, aventi coppie di lati proporzionali e l'angolo ivi compreso congruente, sono simili).

IL RAPPORTO DI SIMILITUDINE

Definizione:

Due figure geometriche si dicono simili se hanno i lati corrispondenti in proporzione (secondo una costante di proporzionalità) e gli angoli corrispondenti uguali.

Per poter effettuare i problemi con le figure simili bisogna calcolare tale costante di proporzionalità detta *rapporto di similitudine (K)*

1. *Rapporto tra i lati*

Dal valore di due lati corrispondenti possiamo calcolare il valore del rapporto della similitudine (K).

$$\frac{AB}{A'B'} = K \qquad \text{e} \qquad \frac{A'B'}{AB} = K'$$

Ogni figura avrà il suo rapporto di similitudine ottenuto ponendo il proprio lato al numeratore e il lato corrispondente della figura simile al denominatore.

Delle due figure simili si hanno sempre due lati corrispondenti noti per poter calcolare K.

Ottenuto K ogni lato può essere calcolato in questo modo:

$$AB = K \cdot A'B'$$

$$A'B' = K' \cdot AB$$

Ogni lato si ottiene moltiplicando il rapporto di similitudine della figura di cui si vuole trovare il lato per il lato corrispondente della figura simile.

Le dimensioni di una figura dipendono dal valore del rapporto:

K < 1 = figura ridotta (la più piccola delle due)

K > 1 = figura ingrandita (la più grande delle due)

ES: **Due quadrilateri sono simili ed hanno tutti gli angoli corrispondenti uguali e i lati corrispondenti in proporzione. I lati del primo quadrilatero misurano 15 cm; 27 cm; 30 cm e 12 cm. Il secondo quadrilatero ha il lato corrispondente al primo del primo quadrilatero che misura 5 cm. Calcola i lati del secondo quadrilatero**

$$K' = \frac{A'B'}{AB} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$B'C' = K' \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9cm$$

$$C'D' = K' \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10cm$$

$$A'D' = K' \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4cm$$

2. *Rapporto tra le altezze*

Dal valore delle altezze corrispondenti possiamo calcolare il valore del rapporto della similitudine (K).

$$\frac{DH}{D'H'} = K \qquad \text{e} \qquad \frac{D'H'}{DH} = K'$$

Ogni figura avrà il suo rapporto di similitudine ottenuto ponendo la propria altezza al numeratore e l'altezza corrispondente della figura simile al denominatore.

Ottenuto K l'altezza può essere calcolato in questo modo:

$$DH = K \cdot D'BH'$$

$$D'H' = K' \cdot DH$$

Ogni altezza si ottiene moltiplicando il rapporto di similitudine della figura di cui si vuole trovare per l'altezza corrispondente della figura simile.

3. *Rapporto tra i perimetri*

Rapportando tra loro i perimetri di figure simili possiamo calcolare il valore del rapporto della similitudine (K).

$$\frac{P_{ABCD}}{P'_{A'B'C'D'}} = K \qquad \text{e} \qquad \frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = K'$$

Ogni figura avrà il suo rapporto di similitudine ottenuto ponendo il proprio perimetro al numeratore e il perimetro della figura simile al denominatore.

Ottenuto K il perimetro può essere calcolato in questo modo:

$$P_{ABCD} = K \cdot P_{A'B'C'D'}$$
$$P_{A'B'C'D'} = K' \cdot P_{ABCD}$$

Ogni perimetro si ottiene moltiplicando il rapporto di similitudine della figura di cui si vuole trovare per il perimetro della figura simile.

ES: **Due quadrilateri sono simili. Il primo quadrilatero ha i lati che misura rispettivamente 12 cm, 36 cm, 45 cm e 60 cm. Il perimetro della seconda misura 102. Calcola la misura dei lati del secondo quadrilatero.**

$$P_{ABCD} = 12 + 36 + 45 + 60 = 153cm$$

$$K' = \frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = \frac{102}{153} = \frac{2}{3}$$

$$A'B' = K' \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8cm$$
$$B'C' = K' \cdot BC = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24cm$$
$$C'D' = K' \cdot CD = \frac{2}{3} \cdot 45 = 30cm$$
$$A'D' = K' \cdot AD = \frac{2}{3} \cdot 60 = 40cm$$

4. *Rapporto tra le aree*

Rapportando tra loro le aree possiamo calcolare il quadrato del valore del rapporto della similitudine (K).

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{A'B'C'D'}} = K^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = K'^2$$
$$K = \sqrt{\frac{A_{ABCD}}{A_{A'B'C'D'}}} \qquad \qquad K' = \sqrt{\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}}}$$

Ogni figura avrà il suo rapporto di similitudine ottenuto facendo la radice quadrata del rapporto tra le aree. Il rapporto si ottiene ponendo la propria area al numeratore e l'area della figura simile al denominatore.

Ottenuto K ogni area può essere calcolata in questo modo:

$$A_{ABCD} = K^2 \cdot A_{A'B'C'D'}$$
$$A_{A'B'C'D'} = K'^2 \cdot A_{ABCD}$$

Ogni area si ottiene moltiplicando il rapporto di similitudine al quadrato della figura di cui si vuole trovare l'area, per l'area della figura simile.

ES: **Due quadrilateri sono simili. Il primo quadrilatero ha l'area che misura 400 cm^2. Calcola l'area della seconda figura sapendo che il suo rapporto di similitudine è 3/4.**

$$K'^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$A_{A'B'C'D'} = K'^2 \cdot A_{ABCD} = \frac{9}{16} \cdot 400 = 225cm^2$$