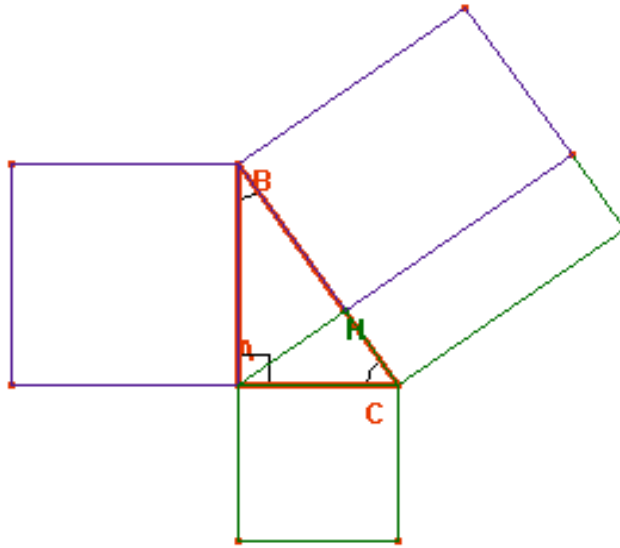


I TEOREMI DI EUCLIDE

Euclide nacque ad Alessandria d'Egitto e visse ai tempi del re Tolomeo I, intorno al 300 a.C. (da non confondere con Euclide di Megara che visse un secolo prima e che era un filosofo). I testi più famosi di Euclide sono «gli Elementi», composti da 12 volumi e nei quali sono racchiuse tutte le regole della matematica che noi conosciamo.

1. PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE

Egli riuscì a suddividere il teorema di Pitagora in due parti più piccole basandosi sulla seconda dimostrazione, cioè dividendo il triangolo costruito sull'ipotenusa in due rettangoli equivalenti rispettivamente ai quadrati costruiti sui cateti:



Da qui poté formulare due uguaglianze:

L'area del quadrato costruito su un cateto, è uguale all'area del rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa stessa:

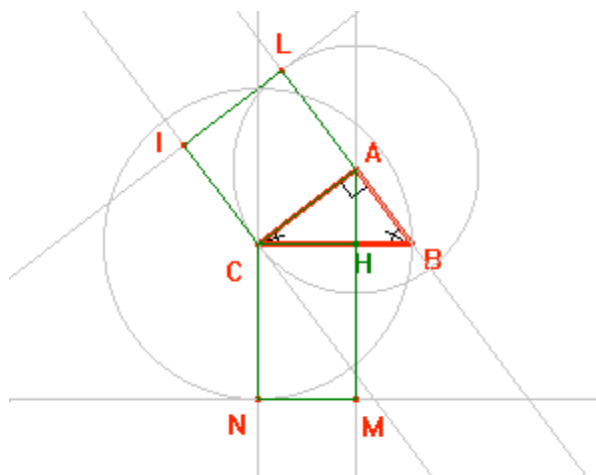
$$\begin{aligned}AC^2 &= BC \times HC \\AB^2 &= BC \times BH\end{aligned}$$

Queste uguaglianze possono essere considerate separatamente e ciascuna può rappresentare la proprietà fondamentale di una proporzione.

Quindi possiamo costruire una **proporzione continua** ponendo ai medi sempre i cateti:

$$\begin{aligned}BC : AC &= AC : HC \\BC : AB &= AB : HB\end{aligned}$$

DEF: In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto su di essa



2. SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE

Egli applicò l'uguaglianza delle aree anche ad altre parti del triangolo rettangolo e ottenne:

L'area del quadrato che ha per lato l'altezza relativa all'ipotenusa è uguale all'area del rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa:

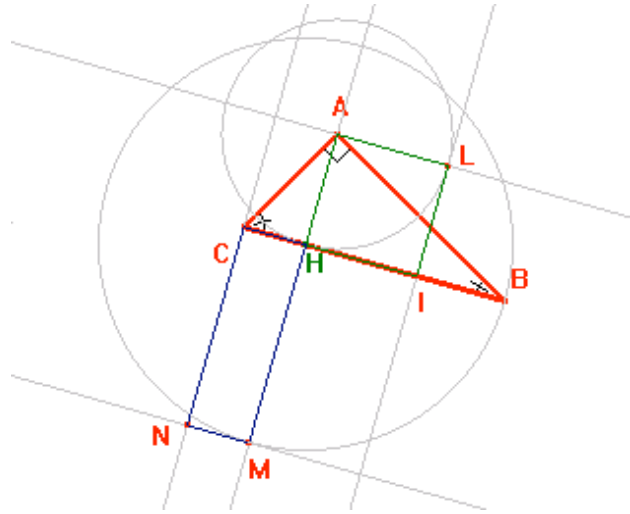
$$AH^2 = HB \times HC$$

Questa uguaglianza può essere considerata la proprietà fondamentale di una proporzione.

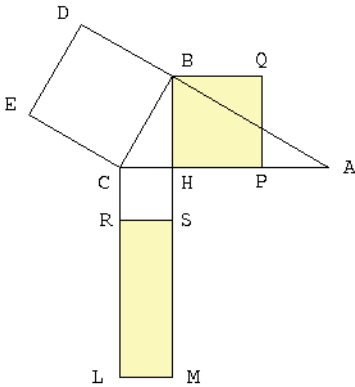
Possiamo costruire perciò una proporzione continua ponendo ai medi sempre l'altezza relativa all'ipotenusa:

$$HB : AH = AH : HC$$

DEF: In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa



ES: Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa che misura 50 cm e le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono una i 16/9 dell'altra. Calcola perimetro e area del triangolo.



DATI

$$AC = 50 \text{ cm}$$

$$AH = 16/9 \text{ HC}$$

INCOGNITA

$$? = P_{ABC}$$

$$? = A_{ABC}$$

RISOLVO

$$n^{\circ} \text{ tot su} = 16 + 9 = 25$$

$$SU = 50 : 25 = 2 \text{ cm}$$

$$AH = 16 \times 2 = 32 \text{ cm}$$

$$HC = 9 \times 2 = 18 \text{ cm}$$

2° teorema di Euclide - $HC : BH = BH : AH$

cioè $18 : x = x : 32$

dove $BH^2 = 18 \cdot 32 = 576$

$$BH = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

1° teorema di Euclide - $AC : CB = CB : HC$

cioè $50 : x = x : 18$

dove $CB = \sqrt{AC \cdot HC} = \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$

$$AC : AB = AB : AH$$

cioè $50 : x = x : 32$

dove $AB = \sqrt{AC \cdot AH} = \sqrt{50 \cdot 32} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$

$$P_{ABC} = 50 + 40 + 30 = 120 \text{ cm}$$

$$A_{ABC} = \frac{C \cdot c}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 60 \text{ cm}^2$$